Anmerkung zum Lösen quadratischer Gleichungen

Allgemeine Form: $ax^2 + bx + c = 0 \;\|: a \; (a \neq 0) \qquad \mathbb{G} = \mathbb{R}$

$$x^2 + \underbrace{\frac{b}{a}}_{p}x + \underbrace{\frac{c}{a}}_{q} = 0$$

Normalform: $x^2 + px + q = 0$

$$x^2 + px = 0 \;\Leftarrow\; \boxed{q = 0} \quad x^2 + px + q = 0 \quad \boxed{p = 0} \;\Rightarrow\; x^2 + q = 0$$

$$x^2 + px = 0 \Leftrightarrow x(x+p) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x = -p$$

$$x^2 + q = 0 \Leftrightarrow x^2 - (-q) = 0 \Leftrightarrow (x - \underbrace{\sqrt{-q}}_{\geq 0})(x + \sqrt{-q}) = 0 \Leftrightarrow x = \sqrt{-q} \vee x = -\sqrt{-q}$$

$$x^2 + px + q = 0 \Leftrightarrow \left(x + \frac{p}{2}\right)^2 - \frac{p^2}{4} + q = 0 \Leftrightarrow \underbrace{\left(x + \frac{p}{2}\right)^2}_{u^2} - \underbrace{\left(\frac{p^2}{4} - q\right)}_{v^2} = 0$$

$$u^2 - v^2 = (u - v)(u + v)$$

$$\Leftrightarrow \left(\left(x + \frac{p}{2}\right) - \sqrt{\underbrace{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}_{\geq 0}}\right)\left(\left(x + \frac{p}{2}\right) + \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \mathbf{x = -\frac{p}{2} + \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q} \vee x = -\frac{p}{2} - \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}}$$

$$\boxed{q = 0} \qquad \boxed{p = 0}$$

16.

	HN	$\mathbb{D}$
a)	x	$\mathbb{Q} \setminus \{\mathbf{0}\}$
b)	$x - 3$	$\mathbb{Q} \setminus \{\mathbf{3}\}$
c)	$(2x + 7)(x - 5)$	$\mathbb{Q} \setminus \left\{\mathbf{-\frac{7}{2}, 5}\right\}$
d)	$(x + 1)(2x - 5)$	$\mathbb{Q} \setminus \left\{\mathbf{-1, \frac{5}{2}}\right\}$
e)	$x(x + 1)(x - 7)$	$\mathbb{Q} \setminus \{\mathbf{-1, 0, 7}\}$
f)	$(x + 3)(x - 4)$	$\mathbb{Q} \setminus \{\mathbf{-3, 4}\}$
g)	$(x + 1)(x - 1)$	$\mathbb{Q} \setminus \{\mathbf{-1, 1}\}$
h)	$x(x + 3)(x - 3)$	$\mathbb{Q} \setminus \{\mathbf{-3, 0, 3}\}$
i)	$(x + 7)(x - 3)(x - 7)$	$\mathbb{Q} \setminus \{\mathbf{-7, 3, 7}\}$
k)	$x(x + 6)(x - 4)$	$\mathbb{Q} \setminus \{\mathbf{-6, 0, 4}\}$

17. *Beispiel:*

e) $\mathbb{D} = \mathbb{Q} \setminus \{3\}$

$$\frac{15 - 5y}{y - 3} + 4 = y - 1 \qquad \| - 4$$

$$\frac{15 - 5y}{y - 3} = y - 5 \qquad \| \cdot (y - 3)$$

$$15 - 5y = (y - 5)(y - 3)$$

$$15 - 5y = y^2 - 8y + 15 \qquad \| - 15 + 5y$$

$$y^2 - 3y = 0$$

$$y = 0 \quad \text{oder} \quad y = 3; \qquad \mathbb{L} = \{0, \cancel{3}\} = \{0\}$$

a) $\mathbb{D} = \mathbb{Q} \setminus \{1\}$;	$\mathbb{L} = \left\{\frac{5}{6}\right\}$	g) $\mathbb{D} = \mathbb{Q} \setminus \{-1\}$;	$\mathbb{L} = \left\{-\frac{6}{7}\right\}$
b) $\mathbb{D} = \mathbb{Q} \setminus \left\{\frac{1}{4}\right\}$;	$\mathbb{L} = \left\{\frac{2}{9}\right\}$	h) $\mathbb{D} = \mathbb{Q} \setminus \left\{-\frac{1}{9}\right\}$;	$\mathbb{L} = \left\{-\frac{1}{12}\right\}$
c) $\mathbb{D} = \mathbb{Q} \setminus \{4\}$;	$\mathbb{L} = \{0, 8\}$	i) $\mathbb{D} = \mathbb{Q} \setminus \{-7\}$;	$\mathbb{L} = \{-4, 0\}$
d) $\mathbb{D} = \mathbb{Q} \setminus \left\{-\frac{3}{2}\right\}$;	$\mathbb{L} = \{0\}$	k) $\mathbb{D} = \mathbb{Q} \setminus \{-2\}$;	$\mathbb{L} = \left\{\frac{8}{11}\right\}$
e) $\mathbb{D} = \mathbb{Q} \setminus \{3\}$;	$\mathbb{L} = \{0\}$	l) $\mathbb{D} = \mathbb{Q} \setminus \{2\}$;	$\mathbb{L} = \{0\}$
f) $\mathbb{D} = \mathbb{Q} \setminus \{4\}$;	$\mathbb{L} = \mathbb{D} = \mathbb{Q} \setminus \{4\}$	m) $\mathbb{D} = \mathbb{Q} \setminus \{2\}$;	$\mathbb{L} = \mathbb{D} = \mathbb{Q} \setminus \{2\}$

18.

a) $\mathbb{D} = \mathbb{Q} \setminus \left\{\frac{3}{2}\right\}$;	$\mathbb{L} = \{-4\}$	g) $\mathbb{D} = \mathbb{Q} \setminus \left\{\frac{3}{2}\right\}$;	$\mathbb{L} = \{-2\}$
b) $\mathbb{D} = \mathbb{Q} \setminus \{0\}$;	$\mathbb{L} = \{\,\}$	h) $\mathbb{D} = \mathbb{Q} \setminus \{0\}$;	$\mathbb{L} = \{\,\}$
c) $\mathbb{D} = \mathbb{Q} \setminus \{4\}$;	$\mathbb{L} = \{-8, 6\}$	i) $\mathbb{D} = \mathbb{Q} \setminus \{-6\}$;	$\mathbb{L} = \{\,\}$
d) $\mathbb{D} = \mathbb{Q} \setminus \left\{0, \frac{2}{3}\right\}$;	$\mathbb{L} = \left\{\frac{3}{5}\right\}$	k) $\mathbb{D} = \mathbb{Q} \setminus \left\{-\frac{3}{2}, 0\right\}$;	$\mathbb{L} = \{-2\}$
e) $\mathbb{D} = \mathbb{Q} \setminus \left\{\frac{3}{2}\right\}$;	$\mathbb{L} = \mathbb{D} = \mathbb{Q} \setminus \left\{\frac{3}{2}\right\}$	l) $\mathbb{D} = \mathbb{Q} \setminus \{4\}$;	$\mathbb{L} = \{\,\}$
f) $\mathbb{D} = \mathbb{Q} \setminus \{2\}$;	$\mathbb{L} = \{\,\}$	m) $\mathbb{D} = \mathbb{Q} \setminus \{4\}$;	$\mathbb{L} = \{\,\}$

19.

a) $\mathbb{D} = \mathbb{Q} \setminus \{0\}$;	$\mathbb{L} = \{-4\}$	d) $\mathbb{D} = \mathbb{Q} \setminus \{1, 3\}$;	$\mathbb{L} = \{-5\}$
b) $\mathbb{D} = \mathbb{Q} \setminus \{-1, 1\}$;	$\mathbb{L} = \{3\}$	e) $\mathbb{D} = \mathbb{Q} \setminus \{-6, -5\}$;	$\mathbb{L} = \{-15\}$
c) $\mathbb{D} = \mathbb{Q} \setminus \left\{\frac{1}{4}\right\}$;	$\mathbb{L} = \{\,\}$	f) $\mathbb{D} = \mathbb{Q} \setminus \left\{\frac{2}{3}\right\}$;	$\mathbb{L} = \mathbb{D} = \mathbb{Q} \setminus \left\{\frac{2}{3}\right\}$

20. a) $\mathbb{D} = \mathbb{Q} \setminus \{-2\}$; $\mathbb{L} = \{7\}$
b) $\mathbb{D} = \mathbb{Q} \setminus \{-1, 1\}$; $\mathbb{L} = \{-4\}$
c) $\mathbb{D} = \mathbb{Q} \setminus \{-2, 4\}$; $\mathbb{L} = \{\,\}$
d) $\mathbb{D} = \mathbb{Q} \setminus \{-1, 1\}$; $\mathbb{L} = \{7\}$
e) $\mathbb{D} = \mathbb{Q} \setminus \{-7, 0\}$; $\mathbb{L} = \{\,\}$
f) $\mathbb{D} = \mathbb{Q} \setminus \{1\}$; $\mathbb{L} = \{2\}$
g) $\mathbb{D} = \mathbb{Q} \setminus \{-7, 3\}$; $\mathbb{L} = \{\,\}$
h) $\mathbb{D} = \mathbb{Q} \setminus \{1, 4\}$; $\mathbb{L} = \{3\}$

21. a) $\mathbb{D} = \mathbb{Q} \setminus \{-1, 2, 3\}$; $\mathbb{L} = \left\{-\frac{7}{5}\right\}$
b) $\mathbb{D} = \mathbb{Q} \setminus \{-1, 1\}$; $\mathbb{L} = \{0\}$
c) $\mathbb{D} = \mathbb{Q} \setminus \{-5, -4, 4\}$; $\mathbb{L} = \{-3\}$
d) $\mathbb{D} = \mathbb{Q} \setminus \{0, 1\}$; $\mathbb{L} = \{\,\}$
e) $\mathbb{D} = \mathbb{Q} \setminus \{-2, -1\}$; $\mathbb{L} = \{\,\}$
f) $\mathbb{D} = \mathbb{Q} \setminus \{2, 4, 6\}$; $\mathbb{L} = \{10\}$

22. Unbekannte Zahl: x

$$\frac{3}{x} = \frac{5}{x+2} \qquad \mathbb{D} = \mathbb{Q} \setminus \{-2, 0\}$$

$$x = 3$$

Gesuchte Zahl: **3**

23. Unbekannte Zahl: x

$$\frac{119}{x} = \frac{112}{x-3} \qquad \mathbb{D} = \mathbb{Q} \setminus \{0, 3\}$$

$$x = 51$$

Gesuchte Zahl: **51**

24. Erste Zahl: x
Zweite Zahl: y

$$\left| \begin{array}{l} x + y = 836 \\ \dfrac{x}{y} = \dfrac{11}{8} \end{array} \right| \xrightarrow{\mathbb{D}_y = \mathbb{Q} \setminus \{0\}} \left| \begin{array}{l} x = 836 - y \\ 8x = 11y \end{array} \right|$$

$$8(836 - y) = 11y$$

$$y = 352, \quad x = 484$$

Vergrösserung der beiden Zahlen um z:

$$\frac{484 + z}{352 + z} = \frac{15}{11} \quad \text{oder} \quad \frac{352 + z}{484 + z} = \frac{15}{11}$$

$$z = 11 \qquad\qquad z = -847$$

Vergrösserung der beiden Zahlen um **11** oder um **−847.**

25. Erste Zahl: x
Zweite Zahl: y

$$\left| \begin{array}{l} x - y = 372 \\ \frac{x}{y} = \frac{9}{5} \end{array} \right| \quad \mathbb{D}_y = \mathbb{Q} \setminus \{0\} \qquad \text{oder} \qquad \left| \begin{array}{l} y - x = 372 \\ \frac{x}{y} = \frac{9}{5} \end{array} \right| \quad \mathbb{D}_y = \mathbb{Q} \setminus \{0\}$$

$$\downarrow \qquad\qquad\qquad\qquad \downarrow$$

$$\left| \begin{array}{l} x = 372 + y \\ 5x = 9y \end{array} \right| \qquad\qquad \left| \begin{array}{l} y = 372 + x \\ 5x = 9y \end{array} \right|$$

$$5(372 + y) = 9y \qquad\qquad 5x = 9(372 + x)$$

$$y = 465, \quad x = 837 \quad \text{oder} \quad x = -837, \quad y = -465$$

Verkleinerung der beiden Zahlen um z:

$$\frac{837 - z}{465 - z} = \frac{7}{4} \text{ oder } \frac{465 - z}{837 - z} = \frac{7}{4} \text{ oder: } \frac{-837 - z}{-465 - z} = \frac{7}{4} \text{ oder } \frac{-465 - z}{-837 - z} = \frac{7}{4}$$

$z = -31$ oder $z = 1333$ oder: $z = 31$ oder $z = -1333$

Verkleinerung von 837 und 465 um **−31** oder um **1333**.
Verkleinerung von −837 und −465 um **31** oder um **−1333**.

26. Zähler des ersten Bruches: x] 2 Lösungsvariable
Nenner des ersten Bruches: y

$$\left| \begin{array}{l} x - 15 = y \\ \frac{y}{y - 12} = \frac{x}{y} \end{array} \right| \xrightarrow{\mathbb{D}_y = \mathbb{Q} \setminus \{0,\, 12\}} \left| \begin{array}{l} x = y + 15 \\ y^2 = x(y - 12) \end{array} \right|$$

$$y^2 = (y + 15)(y - 12)$$

$$y = 60, \quad x = 75$$

oder:

Zähler des ersten Bruches: x] 1 Lösungsvariable
Nenner des ersten Bruches: x − 15

$$\frac{x}{x - 15} = \frac{x - 15}{x - 27} \qquad \mathbb{D} = \mathbb{Q} \setminus \{15, 27\}$$

$$x = 75$$

Erster Bruch: $\mathbf{\frac{75}{60}}$

Zweiter Bruch: $\mathbf{\frac{60}{48}}$

27. Zu addierende Zahl: x

$$\frac{2 + x}{5 + x} = \frac{14}{15} \qquad \mathbb{D} = \mathbb{Q} \setminus \{-5\}$$

$$x = 40; \quad \frac{2 + x}{5 + x} = \frac{42}{45}$$

Gesuchter Bruch: $\mathbf{\frac{42}{45}}$

28. Zu subtrahierende Zahl: x

$$\frac{13 - x}{7 - x} = \frac{4}{5} \qquad \mathbb{D} = \mathbb{Q} \setminus \{7\}$$

$$x = 37; \quad \frac{13 - x}{7 - x} = \frac{-24}{-30}$$

Gesuchter Bruch: $\mathbf{\frac{-24}{-30}}$

29. Zähler des ursprünglichen Bruches: 2x
Nenner des ursprünglichen Bruches: 3x

$$\frac{2x + 8}{3x + 8} = \frac{3}{4} \qquad \mathbb{D} = \mathbb{Q} \setminus \left\{-\frac{8}{3}\right\}$$

$$x = 8; \quad \frac{2x}{3x} = \frac{16}{24}$$

Ursprünglicher (ungekürzter) Bruch: $\mathbf{\frac{16}{24}}$

30. Zähler des ursprünglichen Bruches: 2x
Nenner des ursprünglichen Bruches: 5x

$$\frac{2x - 50}{5x - 50} = -\frac{13}{5} \qquad \mathbb{D} = \mathbb{Q} \setminus \{10\}$$

$$x = 12; \quad \frac{2x}{5x} = \frac{24}{60}$$

Ursprünglicher (ungekürzter) Bruch: $\mathbf{\frac{24}{60}}$

31. Ursprünglicher Preis des teureren Videospiels: x Fr.
Ursprünglicher Preis des billigeren Videospiels: y Fr.] 2 Lösungsvariable

Annahme 1:
Das ursprünglich teurere Videospiel ist auch nach der Preisreduktion noch das teurere.

$$\left| \begin{aligned} x - 14.3 &= y \\ \frac{0.7x}{0.8y} &= \frac{6}{5} \end{aligned} \right| \qquad \mathbb{D}_y = \mathbb{Q} \setminus \{0\}$$

$$\downarrow$$

$$\left| \begin{aligned} x &= y + 14.3 \\ 3.5x &= 4.8y \end{aligned} \right|$$

$$3.5(y + 14.3) = 4.8y$$

$$y = 38.5, \quad x = 52.8$$

Annahme 2:
Das ursprünglich teurere Videospiel wird durch die Preisreduktion zum billigeren.

$$\left| \begin{aligned} x - 14.3 &= y \\ \frac{0.8y}{0.7x} &= \frac{6}{5} \end{aligned} \right| \qquad \mathbb{D}_x = \mathbb{Q} \setminus \{0\}$$

$$\downarrow$$

$$\left| \begin{aligned} x &= y + 14.3 \\ 4y &= 4.2x \end{aligned} \right|$$

$$4y = 4.2(y + 14.3)$$

$$y = -300.3, \quad x = -286$$

nur theoretische Lösung, da der zur Einheit Fr. gehörende Zahlenwert stets nichtnegativ sein muss.

oder:

Ursprünglicher Preis des teureren Videospiels: x Fr.
Ursprünglicher Preis des billigeren Videospiels: (x − 14.3) Fr.] 1 Lösungsvariable

$$\frac{0.7x}{0.8(x - 14.3)} = \frac{6}{5} \qquad \mathbb{D} = \mathbb{Q} \setminus \{14.3\}$$

Ursprüngliche Preise der beiden Videospiele: **Fr. 52.80** und **Fr. 38.50**

32. Anzahl gekaufter Kassetten: x Stück
Preis jeder Kassette: y Fr.] 2 Lösungsvariable

$$\left| \begin{aligned} x \cdot y &= 180 \\ (x + 3)(y - 3) &= 180 \end{aligned} \right|$$

$$\downarrow$$

$$\left| \begin{aligned} x &= \frac{180}{y} \\ xy - 3x + 3y - 9 &= 180 \end{aligned} \right| \qquad \mathbb{D}_y = \mathbb{Q} \setminus \{0\}$$

$$\frac{180y}{y} - \frac{3 \cdot 180}{y} + 3y - 9 = 180$$

$$3y^2 - 9y - 540 = 0$$

$$(y + 12)(y - 15) = 0; \quad y = 15 \text{ oder } \boxed{y = -12}$$

$$x = 12 \text{ oder } \boxed{x = -15}$$

nur theoretisch mögliche Lösung

oder:

Anzahl gekaufter Kassetten: x Stück
Preis jeder Kassette: $\frac{180}{x}$ Fr.
1 Lösungsvariable

$$\frac{180}{x} - 3 = \frac{180}{x+3} \qquad \mathbb{D} = \mathbb{Q} \setminus \{-3, 0\}$$

$$x^2 + 3x - 180 = 0$$

$$(x+15)(x-12) = 0; \quad x = 12 \text{ oder } \underbrace{x = -15}_{\text{nur theoretisch mögliche Lösung}}$$

Anita hat **12** Kassetten gekauft.

5.3. Wurzelgleichungen

68

33. a) $\mathbb{L} = \{2\}$
b) $\mathbb{L} = \{\sqrt{7}\}$
c) $\mathbb{L} = \{2\sqrt{2}\} = \{\sqrt{8}\}$
d) $\mathbb{L} = \left\{\sqrt{\frac{5}{2}}\right\} = \{\sqrt{2.5}\}$

34. a) $\mathbb{L} = \{7, -7\}$
b) $\mathbb{L} = \{1, -1\}$
c) $\mathbb{L} = \{3, -3\}$
d) $\mathbb{L} = \{\sqrt{2}, -\sqrt{2}\}$
e) $\mathbb{L} = \{\sqrt{7}, -\sqrt{7}\}$
f) $\mathbb{L} = \{\,\}$
g) $\mathbb{L} = \{2, -2\}$
h) $\mathbb{L} = \{2, -2\}$

35. a) $\mathbb{L} = \{256\}$
b) $\mathbb{L} = \{484\}$
c) $\mathbb{L} = \{\,\}$
d) $\mathbb{L} = \{49\}$
e) $\mathbb{L} = \{361\}$
f) $\mathbb{L} = \{\,\}$
g) $\mathbb{L} = \{324\}$
h) $\mathbb{L} = \{441\}$
i) $\mathbb{L} = \{\,\}$
k) $\mathbb{L} = \{\,\}$
l) $\mathbb{L} = \{289\}$
m) $\mathbb{L} = \{64\}$

36. *Beispiele:*

d)
$$\begin{aligned} 5\sqrt{x} - x &= 6 \\ 5\sqrt{x} &= 6 + x \\ (5\sqrt{x})^2 &= (6+x)^2 \\ 25x &= 36 + 12x + x^2 \\ x^2 - 13x + 36 &= 0 \\ (x-4)(x-9) &= 0 \\ x - 4 &= 0 \text{ oder } x - 9 = 0 \\ x &= 4 \text{ oder } x = 9 \end{aligned}$$

Probe:

4 für x: $5 \cdot 2 - 4 = 6$ (w)

9 für x: $5 \cdot 3 - 9 = 6$ (w) $\mathbb{L} = \{\mathbf{4, 9}\}$

h)
$$\begin{aligned} 12 + \sqrt{x} &= x \\ \sqrt{x} &= x - 12 \\ (\sqrt{x})^2 &= (x - 12)^2 \\ x &= x^2 - 24x + 144 \\ x^2 - 25x + 144 &= 0 \\ (x - 9)(x - 16) &= 0 \\ x - 9 &= 0 \text{ oder } x - 16 = 0 \\ x &= 9 \text{ oder } x = 16 \end{aligned}$$

Probe:

9 für x: $12 + 3 = 9$ (f)

16 für x: $12 + 4 = 16$ (w) $\mathbb{L} = \{\mathbf{16}\}$

l)
$$\begin{aligned} 5\sqrt{x} + x &= -6 \\ 5\sqrt{x} &= -6 - x \\ (5\sqrt{x})^2 &= (-6 - x)^2 \\ 25x &= 36 + 12x + x^2 \\ x^2 - 13x + 36 &= 0 \\ (x - 4)(x - 9) &= 0 \\ x - 4 &= 0 \text{ oder } x - 9 = 0 \\ x &= 4 \text{ oder } x = 9 \end{aligned}$$

Probe:

4 für x: $5 \cdot 2 + 4 = -6$ (f)

9 für x: $5 \cdot 3 + 9 = -6$ (f) $\mathbb{L} = \{\ \}$

a) $(x - 4)(x - 1) = 0$
$\mathbb{L} = \{\mathbf{4}\}$

b) $(x - 9)(x - 16) = 0$
$\mathbb{L} = \{\mathbf{9}\}$

c) $(x - 25)(x - 1) = 0$
$\mathbb{L} = \{\mathbf{25}\}$

d) $(x - 4)(x - 9) = 0$
$\mathbb{L} = \{\mathbf{4, 9}\}$

e) $(x - 4)(x - 1) = 0$
$\mathbb{L} = \{\ \}$

f) $(x - 25)(x - 9) = 0$
$\mathbb{L} = \{\mathbf{9, 25}\}$

g) $(x - 4)(x - 1) = 0$
$\mathbb{L} = \{\mathbf{1}\}$

h) $(x - 9)(x - 16) = 0$
$\mathbb{L} = \{\mathbf{16}\}$

i) $(x - 25)(x - 1) = 0$
$\mathbb{L} = \{\mathbf{1}\}$

k) $(x - 9)(x - 36) = 0$
$\mathbb{L} = \{\mathbf{9, 36}\}$

l) $(x - 4)(x - 9) = 0$
$\mathbb{L} = \{\ \}$

m) $(x - 1)(x - 16) = 0$
$\mathbb{L} = \{\mathbf{1}\}$